1 數學遊戲的第一堂課

數學經文

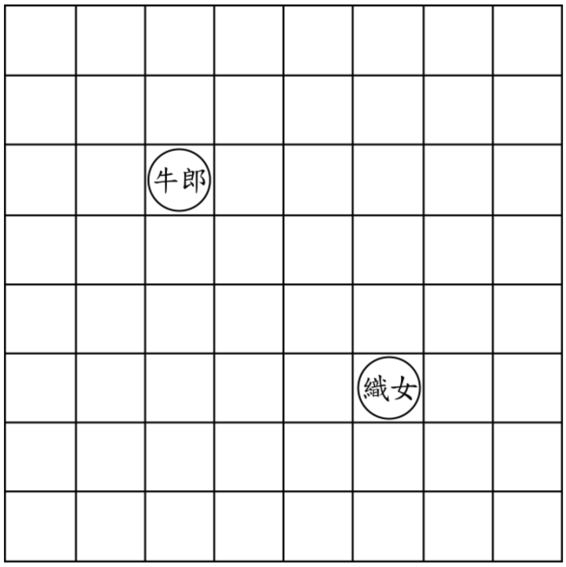
是與非，對與錯，黑與白，輸與贏，愛與恨，情與仇是存在理性頭腦裡的兩端，就像銅板的正面與反面一樣。人的頭腦就在這樣的兩極擺盪，很難止於中間。當停止於中間的時刻發生時，一種清涼的瞥見就顯現了，但它依然只是一種可有可無的瞥見。

數學符號○與×，+1與–1，數字的奇數與偶數，跟黑與白一樣，都是文明的語言，也是頭腦的語言，所有受過邏輯訓練的人，都用這些符號來思考。當我們把心情與頭腦放鬆，超然、不做判斷的站在中線，且無時無刻的觀察這兩端所呈現的變化，就是進入數學遊戲的第一堂課。

每一種活動都有學習它的第一堂課，例如理財有《理財的第一堂課》，修行有《修行的第一堂課》，上學有《開學的第一堂課》，跳舞有《跳舞的第一堂課》。“入門”跟“第一堂課”是有相當差別的，入門是指基礎的訓練，從零開始的學習；而第一堂課則是告訴你這整個歷程的精髓在哪兒。所以第一堂課常常也是最後一堂課，因為重點都已經隱含在第一堂課的內容裡了，剩下的只是領悟與不斷的練習。一位好的老師或優秀的同學應該秉持著“入門”就是“第一堂課”，“第一堂課”就是“最後一堂課”的學習與教學的精神，這樣才能帶領你到那清涼的境界。

一道好的數學遊戲就是把嚴肅的數學思想、概念或公式，藏在誘人又容易掌握的外在形式的技巧。這個技巧就是以遊戲的形式來呈現，透過遊戲的過程，達到永生難忘的高度。現在就讓我們進入本章的題目，也是第一道遊戲：

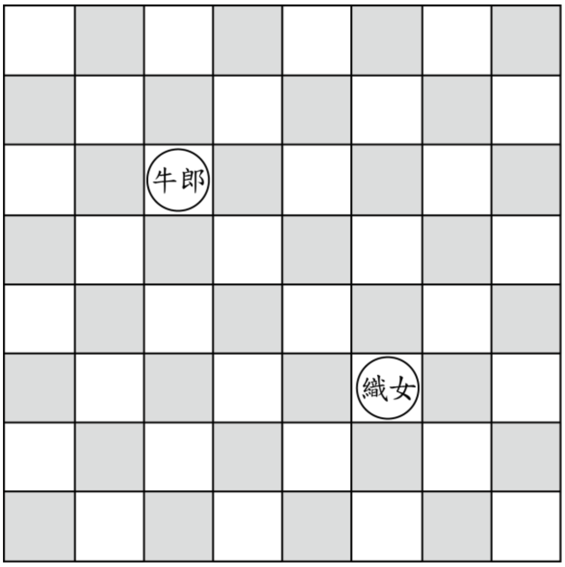
題目：牛郎必須找到一條通向織女的道路，在抵達織女所在位置之前，他必須通過所有的格子各一次，而且僅能採取上、下、左、右的移動方式。牛郎如何辦到呢？



「旁觀者清、當局者迷」是棋藝遊戲的至理名言。在數學遊戲裡，當旁觀者或觀察者，也就是中立的第三者，是至為重要的。當你想成為那個玩的人，你就跟先玩者或後玩者有了認同，就容易陷入當局者迷的囚牢裡。所以跳脫出玩的人，而當超然、不做判斷的旁觀者，且無時無刻的觀察先玩者與後玩者出手後所呈現的變化，就是進入數學遊戲的第一堂課。現在就讓我們進入數學遊戲的第一堂課：

1.1 人生是彩色的，但頭腦卻是黑白的…思考黑、白相間的棋盤

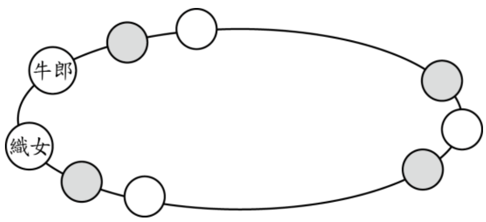
大家從小到大，無論是親身經驗，電腦螢幕上看到或電視轉播，想必見識過很多種遊戲的棋盤。如中國象棋棋盤，圍棋棋盤，跳棋棋盤，西洋棋棋盤…等，這些棋盤中，又以西洋棋棋盤與眾不同，因為它是由黑、白兩種顏色組成。也就是說，西洋棋的棋盤就是由黑、白兩種顏色的方格相間而成的棋盤。讓我們將這道遊戲的棋盤塗成西洋棋的棋盤形式：棋盤上有 32 塊黑色方格與 32 塊白色方格，牛郎與織女都站在白色方格上。



1.2 串起黑、白兩色的念珠

牛郎從自己所在的白色方格出發，因為白色方格的上、下、左、右都是黑色方格，所以牛郎的下一站肯定是黑色方格，再下一站又回到白色方格，…，如此白、黑方格交錯出現，最後走到織女所在的白色方格。

如果將白色方格想成白色念珠，黑色方格當成黑色念珠，那麼牛郎依序走過的黑、白方格所串起的黑、白念珠將是如下的形狀：



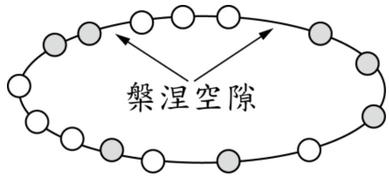
仔細瞧瞧這串黑、白兩色相間的念珠，在牛郎與織女的位置卻是同樣的白色，其餘的位置都是黑、白兩色相間。顯然這串念珠的白色比黑色念珠多一粒，但這與黑、白兩色念珠都是 32 粒不合。因此，牛郎是不可能找到通往織女所在位置的路徑。

1.3 再一次的接受考驗

如果你能讀到這裡，且有所得，那很好。接下來給一則心靈與理性頭腦都受用的啟示：「每個人的腦中儲存了很多思想，每個思想就像一粒念珠，而思考就像線，有正向思考

的人會拋棄沒用的念珠，而將有用的念珠用那條看不見的線串在一起。」

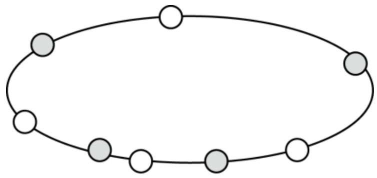
例題 1　如下圖所示，它是由七粒黑色珠子與八粒白色珠子所串起的念珠：



黑、白或白、黑念珠間的空隙稱為“槃涅空隙”。

給任意的黑、白兩色珠子（個數可以不一樣），無論以何種方式串起念珠，都會有偶數個槃涅空隙。

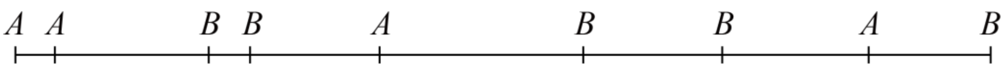
【解】因為黑色與黑色珠子間的空隙及白色與白色珠子間的空隙不是“槃涅空隙”，所以可以將相鄰的黑色珠子綁在一起，視為一粒黑色珠子，也將相鄰的白色珠子綁在一起，視為一粒白色珠子。以上圖為例，經過整理之後變成黑、白相間的一串念珠：



因為念珠黑、白相間，而且偶數個，所以產生偶數個“槃涅空隙”（槃涅空隙等於黑、白念珠的總數）。

有了這經驗之後，請完成中興大學的推甄試題：

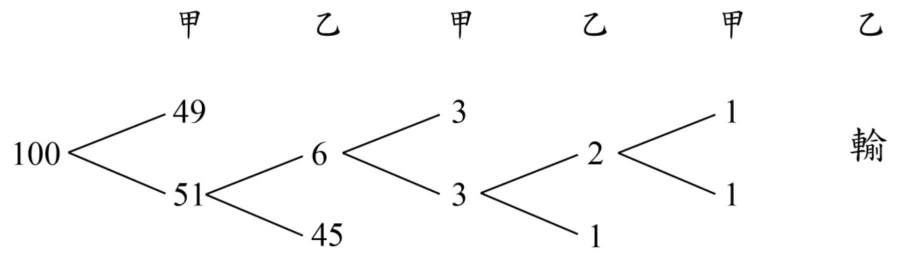
練習 1　在線段 AB 的兩端之間任意取 n 個點，則 AB 被分割成 $n+1$ 小段。將這 n 點任意標示為 A 或 B，如圖所示。試證在這 $n+1$ 小段中，被標示為 AB 或 BA 的小段共有奇數個。



1.4 對拆數進行觀察

甲、乙兩人輪流拆數字，規則如下：甲先將 100 拆成兩個正整數的和，接下來乙從這兩

個數字中，選取一數，並將其拆成兩個正整數的和；接著甲再從乙拆的兩數中，選取一數，並將其拆成兩個正整數的和，…，一直繼續下去，直到有一方無法拆數，遊戲才停止。無法拆數的人輸。下圖是甲、乙兩人輪流拆數字的一個流程圖：



這流程圖代表的拆數過程為

① 甲將 100 拆成 49 與 51 的和；

② 乙選取 51，並將它拆成 6 與 45 的和；

③ 甲選取 6，並將它拆成 3 與 3 的和；

④ 乙選取 3，並將它拆成 1 與 2 的和；

⑤ 甲選取 2，並將它拆成 1 與 1 的和；

⑥ 乙僅能選取 1，但此時已不能拆了，故乙輸。

這道拆數遊戲在有限步驟下一定可以玩完，而且不會雙方平手。像這樣的遊戲常常是不公平的遊戲，也就是說，不是先玩者就是後玩者有必勝的策略，而這必勝的策略經常是需要用數學來呈現的：

練習 2 找個對手一起玩，並思索到底是先玩者或者是後玩者有必勝的策略，而且此必勝策略為何？

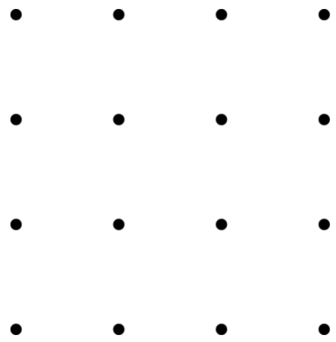
1.5 可怕的對稱…捨就是得的考驗

雖然「對稱」是很優美且容易的概念，但是「對稱」使用得當的話，它的威力是無窮且可怕的。就讓我們欣賞幾道與「對稱」沾上邊的數學遊戲，並欣賞「對稱」產生的美學。

流傳久遠的造房子遊戲，遊戲規則如下：在下圖的 16 個黑點中，兩人輪流在左右或上下相鄰的兩個黑點中間畫一筆。如果正好有 4 筆圍成一個小正方形（稱它為一間房子），

這房子是屬於畫第四筆的人所有。佔有最多房子的人勝。

因為水平有 12 筆，鉛直也有 12 筆，共計 24 筆，所以 12 回合後遊戲結束，且一定有一人佔有比較多的房子，也就是說不會平手。

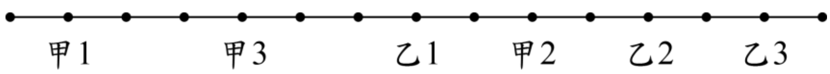


練習 3　試問：先畫或者後畫的人有必勝的策略，其策略又是什麼。

再來玩一道遊戲：

練習 4　如下圖所示，直線上有 15 個點，甲、乙兩個人輪流每次只能選取一個點（甲先玩、乙後玩），而且每次所新選取的點，不能在之前已選過的點的旁邊。最後當有人不能選取點的時候，那個人就輸了。

例如下圖是甲、乙選點的過程：



甲、乙兩人在經過三輪的選點後，甲已經無法再選點了，故乙贏得這遊戲。

試問：甲或乙有必勝的策略，其策略又是什麼。

1.6 需要更細微觀察的遊戲

最後我們介紹一道需要細心觀察的遊戲：

甲、乙兩人輪流選數字的遊戲，甲先選並遵守下列規則：遊戲者必須輪流從

$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}$

中選擇一數，但不可重複對方剛選的數。如此下去，將兩人所選的數字累加起來，當累加至一個給定的正整數 20 者算贏（動彈不得或故意讓累加的數字超過 20 者算輸）。下表是甲、乙兩人玩這遊戲的過程：

① 甲選 3；剩下數字為 17

② 乙選 4；剩下數字為 13

③ 甲選 2；剩下數字為 11

④ 乙選 5；剩下數字為 6

⑤ 甲選 3；剩下數字為 3

⑥ 乙選 1；剩下數字為 2

⑦ 甲選 2；剩下數字為 0，故甲贏。

20	1	2	3	4	5	剩下數字
甲			●			17
乙				●		13
甲		●				11
乙					●	6
甲			●			3
乙	●					2
甲		●				0（贏）

例題 2　試問：甲或乙有必勝的策略，其策略又是什麼。

【解】分析如下：

① 先考慮哪些數字是乙（後玩者）會贏的數字，顯然 1,2,3,4,5 都是甲會贏；你可能以為 6 是乙會贏，其實不對，當甲先選 3 時，乙沒辦法選 3，只能選 1 或 2，故數字 6 還是甲會贏。

② 數字 7 是乙會贏的第一個數字（甲選 2,3,4,5 時，乙選 5,4,3,2；但是甲選 1 時，剩下的數字為 6，利用①的方法，乙可選 3 獲勝）。

③ 數字 8,9,10,11,12 是甲會贏的數字（甲分別選取 1,2,3,4,5 時，剩下的數字為 7，由②知道，甲會贏）。

④ 數字 13 是乙會贏的第二個數字。當甲選 1,2,4,5 時，乙選 5,4,2,1，此時剩下數字為 7，由②知道乙會贏；當甲選 3 時，剩下數字為 10，乙選 5，此時剩下數字為 5，因為甲不能選 5，故在甲選其餘數字之後，乙可以將剩下的數字取完。

⑤ 數字 14,15,16,17,18 是甲會贏的數字（甲分別選取 1,2,3,4,5 時，剩下的數字為 13，由

④知道，甲會贏)。

⑥ 數字 19 是甲會贏的數字(甲選取 3 時，剩下的數字為 16，此時乙不能選 3，故乙選 1,2,4,5 時，甲選 2,1,5,4，剩下的數字為 13 或 7，由④或②知道甲會贏)。

⑦ 數字 20 是乙會贏的第三個數字。當甲選 2,3,4,5 時，乙選 5,4,3,2，此時剩下數字為 13，由④知道乙會贏；當甲選 1 時，剩下數字為 19，由⑥知道乙會贏。

由①②③④⑤⑥⑦的分析得知：在限定數字是 20 的情形下，乙（後玩者）會贏。

〔註〕乙（後玩者）會贏的數字依小到大分別為

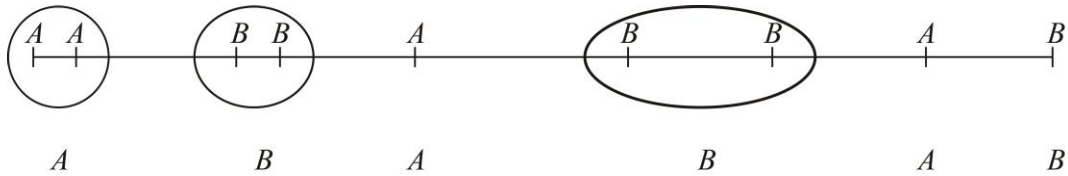
$$7,13=7+6,20=7+6+7,26=7+6+7+6,33=7+6+7+6+7,\cdots.$$

旁觀者或者觀察者除了享有「旁觀者清」的好處外，他還可以兩邊思考，看出兩邊的優缺點或破綻。但是瞭解觀察者的心思又是更高深的藝術了，我們不僅要當個「觀察者」，更要「觀察那個觀察者」，從中得到最奧妙的知識。這也就是克里希納穆提的洞見「千萬別錯過觀察那個觀察者的機會」。

數學遊戲的第一堂課的練習解答

練習 1

因為 $AA\cdots A$ 或 $BB\cdots B$ 相連的部分不會產生 AB 或 BA 小段，所以將相鄰的 A 字母綁在一起，將相鄰的 B 字母也綁在一起（如下圖所示）。



這時產生 $ABABAB\cdots B$ 的排列。因為開頭為 A，尾巴為 B，所以產生的 AB 或 BA 小段共計是奇數小段。

練習 2

對正整數來說，每一個正偶整數都可以表成兩個正奇數的和，例如

$$2=1+1, 4=1+3, 6=1+5, 8=1+7, \cdots;$$

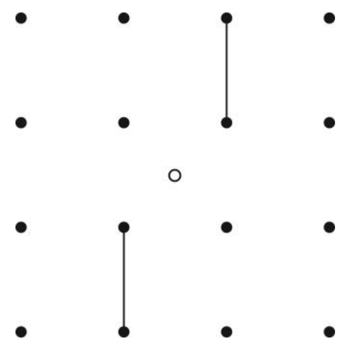
而正奇數表成兩個正整數的和，其中必有一數是偶數，一數是奇數。

這拆數遊戲甲（先玩者）若將 100 拆成兩個正奇數的和，然後乙無論選那個奇數，其分解的數必有一正偶數，另一是正奇數：甲只需選那個正偶數，再將其分解成兩個正奇數的和，便立於不敗之地。

故甲（先玩者）有必勝的策略，其策略就是選取偶數，並將它分解成兩個正奇數的和。

練習 3

這是一則很奇怪的遊戲，原因是後玩者有必勝的策略。這策略跟數學裡的對稱性相關：就以下圖作解說，假設下圖中的白色圓圈是棋盤的中心點，除中心點所在的房子之外，旁邊一共圍繞著 8 個房子。每當先玩者畫下一線段時，後玩者就跟著在此線段對稱於棋盤中心點的位置畫下對應的線段（如圖所示），就這樣玩到結束。



(1) 因為對稱的關係，先玩者與後玩者在中心點外圍的 8 個房子中，各佔一半，即各佔 4 個房子。

(2) 中心點所在的房子會被後玩者佔去（因為對稱關係，後玩者會劃下那房子的最後一筆）。

由此知道：後玩者一定可以擁有 5 個房子，所以必勝。

練習 4

甲有必贏的策略。因為甲選取中間點，就把這些點等分成兩個部份。而乙選取其中一個部份的某點時，那麼甲只要對稱中間點來選取另外一部份的那點即可。這樣下去，乙一定先遭遇到不能選取的情況（如下圖所示），那麼甲就贏定了。